## INTRODUCTION

Soit $x$ un réel quelconque positif ou nul. On peut alors toujours écrire $x$ sous la forme :

$$x = m + y,$$

où $m$ est un entier naturel et $y$ un nombre réel positif ou nul avec $0 \leqslant y < 1$.

On désigne $y$ et $m$ ainsi définis par : $y = d(x)$ (partie décimale de $x$) ;

$m = e(x)$ (partie entière de $x$).

## PARTIE I

Dans cette partie on suppose donnée une fonction F définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles, croissante, continue, telle que $F(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

1° On définit la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par :

$$(\forall\ n \in \mathbb{N})\ p_n = F(n+1) - F(n).$$

Montrez que la série de terme général $p_n$ est convergente. Déterminez la valeur de la somme de cette série.

2° *a.* Soit $x$ un réel fixé quelconque de $[0,1[$ ; montrez que la série de terme général $F(x+n) - F(n)$ est convergente.

*b.* On considère la fonction $\varphi$ définie sur $[0,1[$ par : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [F(x+n) - F(n)]$.

Montrez que $\varphi$ est une fonction croissante.

*c.* Soient $x$ et $y$ deux réels fixés quelconques de $[0, 1[$. Montrez que si $\varepsilon$ est un nombre fixé strictement positif, il existe $N_0$ indépendant de $x$ et de $y$ tel que :

$$(\forall N)\quad N \geqslant N_0 \Rightarrow \sum_{n=N}^{+\infty} |F(x+n) - F(y+n)| < \varepsilon.$$ (On pourra utiliser la première question)

En déduire que $\varphi$ est continue sur $[0, 1[$.

## PARTIE II

La fonction F est supposée être la fonction de répartition continue :

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

d'une variable aléatoire réelle positive ou nulle X, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On fait alors correspondre à la variable aléatoire X, les applications de $\Omega$ dans $[0, +\infty[$ définies par :

$$(d(X))(\omega) = d(X(\omega)) \quad \forall\ \omega \in \Omega$$
$$(e(X))(\omega) = e(X(\omega)) \quad \forall\ \omega \in \Omega.$$

1° Montrez que $e(X)$ et $d(X)$ sont des variables aléatoires. Les variables aléatoires $e(X)$ et $d(X)$ sont alors appelées respectivement partie entière et partie décimale de X. Déterminez en fonction de F la distribution de $e(X)$, puis la fonction de répartition $\varphi$ de $d(X)$ (sous la forme de la somme d'une série lorsque $0 \leqslant x < 1$).

**Tournez la page S.V.P.**

2° On prend pour X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, donc de densité :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0$$
$$= 0 \quad \text{pour} \quad x < 0.$$

*a.* Déterminez explicitement la distribution de $e(X)$. Soit alors la somme de la série entière fonction génératrice de $e(X)$. Déterminez son rayon de convergence et calculez cette fonction à l'intérieur du domaine de convergence. En déduire l'espérance et la variance de $e(X)$.

*b.* Calculez la fonction de répartition $\varphi$ de $d(X)$. Montrez que la loi de $d(X)$ admet une densité que l'on déterminera. Calculez enfin l'espérance et la variance de $d(X)$.

*c.* Dans cette question on suppose en outre que $\lambda = 1$. Calculez alors la variance de X, puis, en utilisant le fait que $X = d(X) + e(X)$, en déduire que les variables aléatoires $d(X)$ et $e(X)$ ne sont pas indépendantes.

*d.* On revient au cas $\lambda > 0$ quelconque, et on pose pour tout $k$ entier naturel,

$$Y_k = X + k.$$

Calculez alors la fonction de répartition de $Y_k$ et en déduire que pour tout $k$ la variable aléatoire $d(Y_k)$ a même loi que $d(X)$.

3° *a.* Soit X une variable aléatoire réelle prenant toutes ses valeurs dans l'intervalle $[0, 2[$. On fait les hypothèses suivantes :

(i) $P(e(X) = 0) = \frac{1}{2}$ ;

(ii) $d(X)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1[$ ;

(iii) $e(X)$ et $d(X)$ sont indépendantes.

Déterminez alors la fonction de répartition de X et reconnaître X comme une variable aléatoire classique.

*b.* La variable aléatoire X prenant cette fois toutes ses valeurs dans $[0, 2]$ et les hypothèses de la question précédente étant toujours vérifiées, montrez que la conclusion précédente n'est pas modifiée.

## PARTIE III

On considère sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ deux variables aléatoires réelles positives indépendantes $Q_1$ et $Q_2$. On note $Q = Q_1 + Q_2$ et $R' = d(Q_1) + d(Q_2)$.

1° Montrer que les variables aléatoires $d(Q_1)$ et $d(Q_2)$ sont indépendantes. Montrez également que $d(R') = d(Q)$.

2° On se place dans le cas où $Q_1$ et $Q_2$ suivent chacune une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

*a.* Calculez la densité de la loi de la variable aléatoire $Q = Q_1 + Q_2$, ainsi que sa fonction de répartition.

*b.* En utilisant la partie II.1°, calculez la fonction de répartition de $d(R')$.

On veut alors étudier certains cas ou $d(Q_1)$ et $d(Q_2)$ suivent indépendamment une même loi et où $d(R') = d(Q)$ suit également cette même loi.

3° On commence par étudier des variables aléatoires $d(Q_1)$ et $d(Q_2)$ indépendantes, de même loi, ne prenant que deux valeurs $a$ et $b$ avec $0 \leqslant a < b < 1$. Montrez qu'il existe un et un seul système $(a_0, b_0)$ pour lequel l'ensemble des valeurs prises par $d(R')$ est exactement $\{a_0, b_0\}$.

On pose alors :

$$P(d(Q_1) = a_0) = P(d(Q_2) = a_0) = p \quad \text{avec} \quad 0 < p < 1.$$

Calculez en fonction de $p$ l'expression $P(d(R') = a_0)$.

Trouvez alors $p$ pour que $d(Q_1)$, $d(Q_2)$, $d(R')$ aient la même loi.

**Tournez la page S.V.P.**

4° On prend maintenant pour $d(Q_1)$ et $d(Q_2)$ des variables aléatoires discrètes, de même loi, ne prenant que les valeurs équidistantes :

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

($n$ désignant un entier quelconque strictement positif).

On désigne par $0 < p_k < 1$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ la probabilité pour $d(Q_1)$ (ou $d(Q_2)$) de prendre la valeur $\frac{k}{n}$.

Exprimez alors $P\left(d(R') = \frac{k}{n}\right)$ en fonction des nombres $p_k$.

5° Les hypothèses de la question précédente étant toujours vérifiées on se propose de déterminer les $p_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ pour que $d(R')$ suive la même loi que $d(Q_1)$ et $d(Q_2)$.

*a.* Que retrouve-t-on pour $n = 2$ ?

*b.* On suppose $n = 3$. Montrez que nécessairement $p_1 = p_2$ et en déduire la solution.

*c.* On suppose $n = 4$. Déterminez la solution au problème posé.

*d.* En vous inspirant des résultats précédents, indiquez lorsque $n$ est quelconque un cas très simple où $d(R')$ suit la même loi que $d(Q_1)$ et $d(Q_2)$.

6° On suppose dans cette question que $d(Q_1)$ et $d(Q_2)$ sont indépendantes et suivent une même loi uniforme sur $[0, 1[$.

*a.* Calculez la densité de la loi de la variable aléatoire $R' = d(Q_1) + d(Q_2)$.

*b.* Calculez la loi de $d(R')$ et montrez qu'elle est bien la même que celle de $d(Q_1)$ et $d(Q_2)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail